
MAHISTRE
ESCALIERS
N. 23
VITTORIO EM. III

THÉORIE DU CALCUL

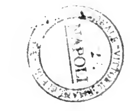
DES

ÉLÉMENTS DES ESCALIERS

A L'USAGE DES CONSTRUCTEURS;

PAR M. A. MAHISTRE,
Docteur ès Sciences.





PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1853

Ouvrages du même Auteur.

Les Analogies de la Géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la Géométrie plane. Chez HACHETTE, rue Pierre-Sarrazin. Ouvrage autorisé par le Conseil de l'Instruction publique. 5 fr.

L'Art de tracer les Cadrans solaires, à l'usage des instituteurs. Chez le même libraire. Ouvrage autorisé par le Conseil de l'Instruction publique... .... 1 fr. 25 c.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, 12.

PRÉFACE.

Le but de cet opuscule n'est pas d'apprendre à construire les escaliers, mais uniquement *de fournir aux épures les éléments qui leur sont indispensables.* Dans les quatre années qui ont suivi 1848, j'ai fait aux ouvriers de la ville de Chartres un cours public de coupe des pierres; c'est là que j'ai puisé l'idée première de ce travail. J'avais pour auditeurs des hommes pleins d'intelligence et d'habileté; ils faisaient bien une épure, l'exécutaient encore mieux, mais les difficultés qu'ils éprouvaient à déterminer les éléments de l'escalier qu'ils avaient en vue étaient toujours très-grandes. Frappé de ces inconvénients, j'ai consulté beaucoup de Traités spéciaux, dans le but d'y trouver la solution des difficultés qui arrêtaient les ouvriers au début de leur travail; mais tous mes efforts ont été vains. Alors seulement j'ai songé à soumettre moi-même cette question au calcul, et c'est le résultat de mes recherches que je publie aujourd'hui. Pour bien comprendre cet ouvrage dans toutes ses parties, il faut être un peu versé dans les sciences mathématiques : toutefois les praticiens pourront s'en servir avec avantage en n'y prenant que les formules qui leur seront nécessaires, et qu'ils trouveront sans peine en consultant la table des matières, ou les titres des paragraphes; mais, pour cela, il sera nécessaire qu'ils se fassent apprendre, par un

professeur de mathématiques, à traduire les formules en nombres, s'ils ne le savent déjà, ce qui est l'affaire de quelques heures de travail. J'ai résolu dans cet opuscule le problème des escaliers dans les cages cylindriques, que la base ait ou non des parties *droites* et des parties *courbes*, des angles *saillants* ou *rentrants*. J'avais aussi traité la même question pour les cages coniques, la courbe de base étant quelconque; mais l'utilité de cette dernière partie ne m'a pas paru suffisamment démontrée pour justifier sa publication.

Qu'il me soit permis, avant de terminer cette préface, d'adresser des remercîments à M. Porcher, maître menuisier, à Chartres, pour les utiles renseignements qu'il m'a fournis, ainsi qu'à MM. Dhonneur, Brest, Bouthemard, Fritel, ouvriers distingués, pour les jolis escaliers de formes si diverses, qu'ils ont exécutés en petit, et qui ont servi, pour ainsi dire, de vérification à mes formules.

THÉORIE DU CALCUL

DES

ÉLÉMENTS DES ESCALIERS.

§ I.

Introduction.

1. Quand un constructeur veut établir un escalier dans une cage donnée, il commence par diviser la hauteur du palier par les valeurs extrêmes de la hauteur qu'on donne aux marches; il obtient ainsi deux limites, entre lesquelles le nombre des marches sera nécessairement compris, et il choisit entre ces limites le nombre n, qu'il suppose pouvoir convenir. Il adopte aussi provisoirement un certain emmarchement, puis il trace une ligne de giron qu'il fait passer soit par le milieu, soit à 48 ou 50 centimètres de l'origine de cet emmarchement; enfin, il partage en $n-1$ parties d'égale longueur la ligne ainsi tracée; et si les divisions ou les *girons* obtenus sont assez grands pour contenir la longueur du pied, il adopte cette courbe pour servir de base à l'épure de son escalier, pourvu, toutefois, que le *giron, augmenté du double d'une hauteur de marche, donne 64 centimètres* ou à peu près (*). Mais le nombre des mar-

(*) On admet ordinairement un écart de 4 à 5 centimètres de chaque côté de 64; mais la relation ci-dessus, qui est citée par Blondel dans son *Traité d'Architecture*, et que nous adopterons dans tout ce qui va suivre, paraît le mieux convenir, tant pour l'agrément que pour le facile parcours de l'escalier.

ches ainsi obtenu ne convient pas toujours à l'escalier; d'un autre côté, la ligne de giron choisie à priori ne satisfait que rarement aux conditions précédentes, et il en résulte des tâtonnements souvent très-longs.

Déterminer à priori les éléments de l'escalier, construire sans tâtonnement la courbe de giron, quelle que soit la cage, pourvu qu'elle soit cylindrique : tel est le but que je me suis proposé dans ce travail.

2. Soient g la grandeur d'un giron et h la hauteur d'une marche, nous aurons d'abord

$$(1) \qquad g + 2h = 64^c.$$

Ordinairement, quel que soit l'escalier à construire, on ne donne pas aux marches moins de 12 centimètres de hauteur ni plus de 20 centimètres; donc, si dans l'équation ci-dessus on fait successivement $h = 20^c$, $h = 12^c$, on aura les limites extrêmes des girons, savoir : $g = 24^c$, $g = 40^c$. En résumé, on aura, tant pour les limites des hauteurs de marches que pour celles des girons,

$$h > 12^c, \qquad g > 24^c,$$
$$h < 20^c, \qquad g < 40^c,$$

les signes $>$ et $<$ n'excluant pas l'égalité, comme dans tout ce qui va suivre. Cela posé, nous aurons évidemment, en nommant H la hauteur du palier,

$$(2) \qquad \begin{cases} g = 64^c - 2h, \\ h = \dfrac{H}{n}, \end{cases}$$

le centimètre étant pris, dans ces équations, pour unité de longueur. Nous déterminerons d'abord le nombre des marches, car ce nombre étant connu, g et h le seront aussi (*).

(*) Dans les formules que nous obtiendrons, n sera un nombre quelconque positif; il sera nombre entier dans tous les cas pratiques.

Puisque

$$h > 12^c, \quad h < 20^c,$$

on aura également

$$\frac{H}{n} > 12, \quad \frac{H}{n} < 20,$$

d'où l'on tire

(3) $$n > \frac{H}{20}, \quad n < \frac{H}{12}.$$

Je nommerai ces deux limites, les *limites générales du nombre des marches;* et l'on voit à priori que la forme de la cage devra généralement avoir pour effet d'en restreindre l'amplitude.

3. Quelle que soit la cage destinée à recevoir un escalier, il faut que *la longueur des marches qui sont normales à la cage soit partout la même.*

Si la cage a pour base un polygone rectiligne, on remplira évidemment cette condition en prenant pour courbes de giron et de jour deux polygones ayant leurs angles arrondis, et dont les éléments rectilignes, parallèles à ceux de la cage, en seront tout autour également distants.

Lorsque la cage sera curviligne, les lignes de giron et de jour seront des courbes équidistantes de la cage.

Dans tous les cas, nous mettrons, selon l'usage, une distance de 48 à 50 centimètres entre la courbe de jour et celle de giron (ou de foulée), ou bien nous ferons passer celle-ci par le milieu de l'emmarchement, afin qu'en parcourant l'escalier, on décrive à très-peu près la ligne de giron sur laquelle le mouvement est plus facile que sur toute autre courbe.

§ II.

Escaliers dans les cages qui ont pour bases des polygones convexes.

4. Soient Ax, Fy (*fig.* 1) les projections des arêtes

saillantes et antérieures de la première et de la dernière marche. Ayant construit un polygone équidistant du premier, il est évident que les sommets de ce polygone seront situés sur les bissectrices des angles de celui qui sert de base à la cage. Ayant encore construit un nouveau polygone équidistant du précédent, je mène de ses différents sommets les perpendiculaires $b'b$, $c'c$, etc., puis des points b', c', etc., et avec $b'b$ pour rayon, j'arrondis les angles du polygone $a\beta\gamma\ldots f$, comme on le voit sur la figure. Cela posé, je fais

$$AB = A, \quad BC = A', \quad CD = A'', \ldots, \quad EF = A_n,$$

$$xP = R, \quad zS = R', \quad uT = R'', \ldots, \quad yQ = R_n,$$

$$AP = p, \quad BP = a, \quad FQ = q, \quad EQ = a_n,$$

$$b'b = c'c = d'd = \ldots = \rho,$$

$$bb'b = \varphi, \quad cc'c = \varphi', \quad dd'd = \varphi'', \ldots, \quad Pp = u,$$

et les triangles semblables de la figure donneront successivement :

$$ap = p - \frac{p}{R} u,$$

$$bp = a - \frac{a}{R} (\rho + u),$$

$$bc = A' - \frac{A'}{R'} (\rho + u),$$

$$cd = A'' - \frac{A''}{R''} (\rho + u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$eq = a_n - \frac{a_n}{R_n} (\rho + u),$$

$$fq = q - \frac{q}{R_n} u,$$

$$(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) \rho = \mu\pi\rho.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, nommant 2ϖ et $2P$ les longueurs de cage et de ligne de foulée terminées aux arêtes Ax, $F\gamma$; posant, pour abréger,

$$\frac{A}{R}+\frac{A'}{R'}+\frac{A''}{R''}+\ldots+\frac{A_n}{R_n}=\sum\cdot\frac{A}{R},$$

il vient

$$2P=2\varpi-u\sum\cdot\frac{A}{R}-\rho\left(\sum\frac{A}{R}-\frac{p}{R}-\frac{q}{R_n}-\mu\pi\right),$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad u=\frac{2(\varpi-P)-\rho\left(\sum\frac{A}{R}-\frac{p}{R}-\frac{q}{R_n}-\mu\pi\right)}{\sum\cdot\frac{A}{R}}.$$

Dans cette formule, les quantités p et q devront être regardées comme positives ou comme négatives, suivant qu'elles seront comptées en dedans ou en dehors des angles AxB, $E\gamma F$.

Remarque. — Les triangles semblables de la figure donnent encore :

$$\frac{a}{R}=\frac{b\beta}{\rho},$$

$$\frac{A'}{R'}=\frac{b\beta+c\gamma}{\rho},$$

$$\frac{A''}{R''}=\frac{c\gamma+d\delta}{\rho},$$

. . . .

$$\frac{a_n}{R_n}=\frac{e\varepsilon}{R_n}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\sum\cdot\frac{A}{R}-\frac{p}{R}-\frac{q}{R_n}=\frac{b\beta b+c\gamma c+\ldots+e\varepsilon e}{\rho}:$$

par conséquent, si l'on juxtaposait à la figure $bb'b$ successivement les figures $cc'c$, $dd'd$,..., $ee'e$, on formerait au-

tour du cercle décrit du point b' avec ρ pour rayon, un polygone dont le périmètre C donnerait

$$\frac{C}{\rho} = \sum \cdot \frac{A}{R} - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}.$$

Comme le rayon de ce cercle peut être arbitrairement choisi, si l'on prend $\rho = 1$, on aura simplement

$$C = \sum \cdot \frac{A}{R} - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}.$$

On remarquera aussi que l'angle tourné du côté du polygone ainsi formé, et compris entre les rayons extrêmes, sera égal à $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots$.

Si l'on tenait à mesurer, sur la même figure, les quantités $\frac{p}{R}$, $\frac{q}{R_n}$, il suffirait de mener les lignes $b'\alpha$, $c'g$, respectivement parallèles aux arêtes de *départ* et d'*arrivée* de l'escalier Ax, Fy, car on aurait évidemment

$$\frac{p}{R} = \frac{\alpha\beta}{\rho}, \quad \frac{q}{R_n} = \frac{cg}{\rho}.$$

La construction de ce polygone auxiliaire permettra d'abréger, dans la pratique, le calcul des formules qui servent à déterminer les éléments de l'escalier.

Remarque. — La valeur de P que renferme la formule (4) pourrait n'y entrer que par approximation; cela aurait lieu évidemment si Ax passait entre les points b et β. Mais cette circonstance, qui n'aurait d'ailleurs, dans la pratique, qu'une importance médiocre, est d'autant moins à craindre que, généralement, les arêtes des marches extrêmes sont ou normales à la cage, ou peu inclinées sur celle-ci.

Soient maintenant r la plus petite parmi les perpendiculaires $R, R', R'', \ldots, R_n$, ε la longueur de la plus petite marche ou l'*emmarchement*, s ce qu'il faut ajouter à u pour former ε (nous prendrons $s = 48$ ou 50 centimètres); comme

on doit avoir $\rho > s$, il faut et il suffit, pour que le problème soit possible, qu'on ait à la fois

$$u > 0, \quad u + \rho < r.$$

Développant ces deux conditions, on trouve

$$P > \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2}r\sum\frac{A}{R} + \varpi$$

pour $u + \rho < r$,

$$P < \varpi + \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi - \sum\frac{A}{R} + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right)$$

pour $u > 0$.

Remarquons maintenant que

$$g = \frac{2P}{n-1}, \quad h = \frac{H}{n};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$(5)\quad \begin{cases} P = (0^m,32)\,n - H - \left(0^m,32 - \dfrac{H}{n}\right) \\ \quad = (n-1)\left[(0,32) - \dfrac{H}{n}\right]. \end{cases}$$

Substituant cette valeur de P dans les limites ci-dessus, et observant que $\frac{1}{2}g = 0^m,32 - \frac{H}{n}$, on trouve, en résolvant par rapport à n,

$$(6)\quad \begin{cases} n > (3,125)\left[\begin{array}{l} H + \varpi + \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) \\ \quad + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}r\sum\frac{A}{R} \end{array}\right], \\ n < (3,125)\left[\begin{array}{l} H + \varpi + \frac{1}{2}\rho \\ \quad \times\left(\mu\pi - \sum\frac{A}{R} + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) + \frac{1}{2}g \end{array}\right]. \end{cases}$$

Si dans la limite inférieure de n on remplace $\frac{1}{2}g$ par sa valeur maximum, et si, dans la limite supérieure, on rem-

place de même $\frac{1}{2}g$ par sa valeur minimum, on aura des limites qui conviendront nécessairement à l'escalier, mais qui pourront ne pas renfermer toutes les solutions du problème; on obtiendra ainsi

$$(7)\left\{\begin{array}{l} n > (3{,}125)\left[\begin{array}{l} \mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}}{,}20 \\ \quad + \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) - \frac{1}{2}r\sum\cdot\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} \end{array}\right], \\ n < (3{,}125)\left[\begin{array}{l} \mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}}{,}12 \\ \quad + \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi - \sum\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) \end{array}\right]. \end{array}\right.$$

Si dans la limite inférieure (6) on donne à g sa valeur minimum, et dans la limite supérieure sa valeur maximum, on aura des limites plus larges que les précédentes, qui pourront être les limites exactes de n, et qui seront telles, que toute valeur qui leur serait extérieure ne conviendra pas à l'escalier; comparant les limites ainsi obtenues avec les limites (7), on reconnaît que, pour passer de ces dernières aux premières, il suffit de retrancher de la limite inférieure, et d'ajouter à la limite supérieure

$$(3{,}125)(0{,}08) = 0{,}25.$$

Si les limites qui résultent de cette correction ne comprennent aucun nouveau nombre entier, les limites (7) seront les limites exactes de n; dans le cas contraire, les valeurs entières introduites par la correction (dont le nombre ne saurait évidemment surpasser 2) seront des solutions douteuses du problème, et si l'on veut y avoir égard, il faudra recourir soit aux limites exactes de n, soit à des formules de correction qui n'introduisent aucune solution étrangère au problème.

Pour obtenir les limites exactes de n, posons, pour

abréger,

$$S = \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2}r\sum\frac{A}{R},$$

$$S' = \frac{1}{2}\rho\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n} - \sum\frac{A}{R}\right),$$

$$\lambda = (3,125)(H + \varpi + 0,32 + S),$$

$$\lambda' = (3,125)(H + \varpi + 0,32 + S'),$$

$$K = (3,125)\,H.$$

Remplaçons ensuite, dans les formules (6), $\frac{1}{2}g$ par sa valeur $\frac{1}{2}g = 0,32 - \frac{H}{n}$, et nous aurons à satisfaire aux deux conditions

$$n^2 - \lambda n + K > 0,$$

$$n^2 - \lambda' n + K < 0.$$

Pour cela il suffira de prendre, relativement à la première,

$$n > \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - K} \quad \text{ou} \quad n < \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - K},$$

et, relativement à la seconde,

$$n > \frac{1}{2}\lambda' - \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - K} \quad \text{et} \quad n < \frac{\lambda'}{2} + \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - K}.$$

Je dis maintenant qu'on aura

$$\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - K} > \frac{\lambda'}{2} - \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - K};$$

en effet, les quantités λ, λ' étant positives, puisqu'elles surpassent respectivement les limites des nombres de marches, on trouve, après quelques transformations,

$$\sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - K} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - K} < \frac{1}{2}(\lambda' + \lambda),$$

relation qui se trouve vérifiée d'elle-même. Il suit de là que les limites de n seront

$$n > \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mathrm{K}},$$
$$n < \frac{1}{2}\lambda' + \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - \mathrm{K}},$$

$$n > \frac{1}{2}\lambda' - \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4} - \mathrm{K}},$$
$$n < \frac{1}{2}\lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{4} - \mathrm{K}}.$$

On peut maintenant s'assurer que les deux dernières limites de n ne sauraient convenir en aucun cas. En effet, posant

$$p = (0{,}20)\,(3{,}125),$$

$\lambda - p$ sera une quantité plus petite que la limite inférieure de n, et il suffira de faire voir que la relation

$$\lambda - p > \frac{1}{2}\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mathrm{K}}$$

sera toujours vérifiée d'elle-même. En effet, on trouve, en réduisant,

$$\frac{1}{2}\lambda - p > -\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - \mathrm{K}}.$$

Cela posé, si $\frac{1}{2}\lambda > p$, la condition précédente se trouvera vérifiée d'elle-même; si $\frac{1}{2}\lambda < p$, on aura, en transposant et élevant ensuite au carré,

$$\lambda > p + \frac{\mathrm{K}}{p}.$$

Mais $\frac{K}{p} > p$; car, dans le cas contraire, on aurait

$$H < \frac{p^2}{3,125} \quad \text{ou} \quad H < 0^m,125,$$

ce qui est absurde; donc finalement,

$$\lambda > 2p,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi les limites exactes de n sont

$$(8) \quad \begin{cases} n > \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - K}, \\ n < \frac{1}{2}\lambda' + \sqrt{\frac{1}{4}\lambda'^2 - K}. \end{cases}$$

Pour passer facilement des limites (7) aux limites (8), nommons l et l' les deux premières limites, et posons

$$l + \delta l = \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - K},$$

$$l' + \delta l' = \frac{1}{2}\lambda' + \sqrt{\frac{1}{4}\lambda'^2 - K};$$

en faisant, pour abréger,

$$f = (3,125)(0,12) = 0,375,$$

$$f' = (3,125)(0,20) = 0,625,$$

nous aurons

$$l = \lambda - f, \quad l' = \lambda' - f',$$

et, par suite,

$$\delta l = -\left(\frac{K}{l + \delta l} - f\right),$$

$$\delta l' = f' - \frac{K}{l' + \delta l'}.$$

Comme, par la nature des limites l et l', les quantités δl et $\delta l'$ doivent être, la première négative, la seconde positive, en les supprimant au dénominateur, on aura des va-

leurs

$$(9)\quad \begin{cases} \delta l = -\left(\frac{K}{l} - f\right), \\ \delta l' = f' - \frac{K}{l'}, \end{cases}$$

qui n'introduiront dans les limites particulières de n aucune solution étrangère au problème (*).

Pour obtenir les diverses solutions du problème, on calculera donc à la fois :

1°. *Les limites particulières de* n, *c'est-à-dire les limites de* n *relatives à la cage proposée ;*

2°. *Les limites générales de* n *répondant à la même hauteur de palier* H; *alors tous les nombres entiers compris à la fois entre les limites particulières et les limites générales conviendront à l'escalier proposé.*

Remarque. — On aurait pu résoudre le problème en employant des rayons différents pour arrondir les angles de la ligne de foulée; mais la solution de cette question trouvera mieux sa place dans les escaliers à *cages curvilignes*. (*Voir* n° 15, *première remarque*.)

5. Appliquons les formules précédentes à quelques cas particuliers; supposons, par exemple, que la ligne de départ de l'escalier coïncide avec la ligne d'arrivée; Ax (*fig.* 2) étant cette ligne, nous aurons, par les triangles semblables de la figure,

$$\frac{AP}{Px} = \frac{AQ}{Qy}, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n} = 0,$$

en observant qu'ici

$$AP = p, \quad AQ = -q, \quad Px = R, \quad Qy = R_n.$$

(*) Si l'on veut avoir des valeurs de δl et de $\delta l'$ plus approchées, il suffira évidemment de remplacer dans les formules (9) l et l' par les valeurs de ces quantités qui résultent de la première correction, et ainsi de suite.

On aura encore

$$\frac{\mathrm{BS}}{m\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{P}x}, \quad \frac{\mathrm{FS}}{m\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{Q}y};$$

ajoutant ces égalités membre à membre, et faisant remarquer que $\mathrm{AB} = \mathrm{A}$, $\mathrm{AF} = \mathrm{A}_n$, il vient, en posant $\mathrm{BF} = \mathrm{A}_1$, $m\mathrm{S} = \mathrm{R}_1$,

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{R}_1} = \frac{\mathrm{A} - p}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{A}_n - q}{\mathrm{R}_n} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{R}_n};$$

et comme dans ce cas $\mu = 2$ à cause que le polygone est fermé, la valeur de u et les limites (7) de n deviennent

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{2(\varpi - \mathrm{P}) - \rho\left(\sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} - 2\pi\right)}{\sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}}, \\ n &> (3{,}125)\left(\mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}},20 + \pi\rho - \frac{1}{2} r \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}\right), \\ n &< (3{,}125)\left[\mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}},12 + \frac{1}{2}\rho\left(2\pi - \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, A, A′, A″, etc., représentent les divers côtés du polygone; R, R′, R″, etc., les perpendiculaires abaissées sur ces côtés, des points de rencontre des bissectrices des angles.

Nous ferons remarquer, une fois pour toutes, que les limites exactes de n seront données, dans chaque cas, par les formules (8), en attribuant à S et à S′ des valeurs convenables; mais on arrivera plus vite par l'emploi des formules de correction (9). Dorénavant nous nous bornerons à déterminer les limites restreintes de n.

Pour donner une application des formules (4) et (7), supposons qu'on veuille calculer les éléments d'un escalier dont la cage (*fig.* 3) est EDGF, mais auquel, pour une

cause ou pour une autre, on veut donner un certain reculement EC. L'escalier devant avoir pour ligne de départ Cx, et pour ligne d'arrivée Fy; posons ED = B, OB = l, EC = f, nous aurons, dans ce cas,

$$\varpi = B + l + \frac{1}{2} f,\quad p = 0,\quad q = 0,\quad r = l,\quad \mu = 1,\quad \sum \frac{A}{R} = 4,$$

et les formules (4) et (7) deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}(B + l) + \frac{1}{4}(f + \pi\rho - 2P) - \rho, \\ n > (3,125)\left[H + B + l + \frac{1}{2} f + 0,20 - \left(2l - \frac{1}{2}\pi\rho\right)\right], \\ n < (3,125)\left[H + B + l + \frac{1}{2} f + 0,12 - \frac{1}{2}\rho(4 - \pi)\right]. \end{cases}$$

Appliquons ces formules à un exemple numérique : prenons

$$B = 3^m,\quad l = 1^m,\quad f = 0^m,40,\quad \rho = 0^m,60;$$

supposons que la maison ait trois étages, et que les hauteurs consécutives des paliers soient

$$3^m,50,\quad 3^m,20,\quad 3^m.$$

Occupons-nous d'abord de la première volée. Cela posé, nous trouvons, à l'aide des deux dernières formules (11), que les limites particulières de n sont

$$n > 21,74,\quad n < 23,63;$$

on a aussi, pour les limites générales,

$$n > 17,5,\quad n < 29,17;$$

les seuls nombres qui conviennent au problème sont donc

$$n = 22,\quad n = 23,$$

de sorte que la question admet deux solutions; prenant

$n = 22$, les éléments de l'escalier sont

$$n = 22,\quad h = 15^{c},91,\quad g = 32^{c},18,\quad P = 3^{m},3789,$$
$$u = 0^{m},2818,\quad \varepsilon = 0,7818.$$

Déterminons maintenant les éléments des deux autres rampes; comme pour celles-ci, la courbe de giron doit être la même que la précédente, moins le reculement; en supposant que le bord des deux autres paliers se projette sur EF, il faudra déterminer n de manière à remplir cette condition. Supposons que les quantités P, H, n se rapportent à une rampe dont les éléments ont déjà été obtenus, par exemple à la première; nous aurons

$$P = (n-1)\left(0,32 - \frac{H}{n}\right).$$

D'un palier à l'autre, les quantités P, H, n éprouvent généralement des variations peu considérables; alors, si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport à δn, on aura

$$\delta n = \frac{n[n\delta P + (n-1)\delta H]}{n^2(0,32) - H}, \tag{12}$$

dans laquelle on substituera pour δP sa valeur tirée de l'équation de condition $\delta u = 0$, lorsque cette quantité δP ne sera pas connue à priori. Ayant calculé δn, on la remplacera par le nombre entier positif ou négatif qui en diffère le moins, puis on l'ajoutera avec son signe à la valeur de n trouvée pour la première volée; le résultat obtenu sera le nombre de marches relatif à la nouvelle rampe. En divisant par ce nombre la nouvelle hauteur de palier, et par ce nombre moins un la longueur de la nouvelle ligne de foulée, on aura les quantités h et g, et si h est compris entre 12 et 20 centimètres, g entre 24 et 40 centimètres, on les adoptera; car, d'après la manière dont nous avons cal-

culé δn, la relation $g + 2h = 64^c$ sera à très-peu près satisfaite.

Reprenons les calculs relatifs à la deuxième volée de l'escalier; nous avons

$$\delta H = -0^m,30, \quad \delta P = -\frac{1}{2}f = -0,20;$$

par suite, la formule (12) donne

$$\delta n = -1,55;$$

le nombre entier qui approche le plus de cette valeur étant -2, nous prendrons $\delta n = -2$, et nous aurons

$$n = 20, \quad h = 16^c, \quad g = 33^c,46;$$

ici $g + 2h = 65^c,46$.

Comparant la troisième volée à la seconde, on a

$$\delta H = -0,20, \quad \delta P = 0,$$

d'où

$$\delta n = -0,65;$$

prenant $\delta n = -1$, on trouve

$$n = 19, \quad h = 15^c,79, \quad g = 35^c,32.$$

Ici, $g + 2h = 66^c,9$, et l'on voit que ces approximations sont plus que suffisantes.

Si l'on voulait rendre égaux les girons relatifs à toutes les rampes, on poserait $\delta g = 0$; alors, comme $g = \frac{2P}{n-1}$, on aurait

$$(a) \qquad \delta n = (n-1)\frac{\delta P}{P}.$$

On trouverait de la même manière

$$(b) \qquad \delta n = n\frac{\delta H}{H},$$

si l'on voulait rendre égales toutes les hauteurs de marches.

Mais les résultats trouvés pour g ou pour h ne seront qu'approchés, à cause que ∂n ne sera pas généralement un nombre entier. Pour donner une application des formules ci-dessus, par exemple de la formule (a), proposons-nous de remplacer la première des rampes précédentes par deux demi-rampes aboutissant à une porte que l'escalier doit desservir. Supposons que la dernière arête saillante de la première demi-rampe élevée de $1^m,80$ se projette en PZ (*fig.* 3), telle que $DP = 0^m,834$; alors, en nommant $2\varpi_1$ la longueur PDC, nous aurons

$$\varpi_1 = 2^m,117;$$

de plus, comme $u = 0^m,2818$ et $\rho = 0^m,60$, on reconnaîtra sans peine que le rayon de la partie circulaire de la ligne de foulée se trouvera diminué de $0^m,05$. Cela posé, reprenons la formule (4) en y faisant $p = 0$, $q = 0$; tirons de cette formule la valeur de ∂u, égalons à zéro le résultat trouvé, et nous aurons

$$(c)\left\{\begin{aligned} \partial P = \partial\varpi - \tfrac{1}{2}\rho\left(\partial.\sum\tfrac{A}{R} - \pi\partial\mu\right) - \tfrac{1}{2}\partial\rho\left(\sum\tfrac{A}{R} - \mu\pi\right) \\ - \tfrac{1}{2}u\partial.\sum\tfrac{A}{R}. \end{aligned}\right.$$

Mais ici $\varpi = 4,20$, $\varpi_1 = 2^m,117$, partant $\partial\varpi = -2,083$; l'on a aussi

$$\partial.\sum\frac{A}{R} = -2,\quad \partial\mu = -\frac{1}{2},\quad \partial\rho = -0,05,\quad \sum\frac{A}{R} = 4,$$

$$\mu = 1,\quad u = 0,2818;$$

par suite,

$$\partial P = -1,6509,$$

et comme $P = 3,3789$, la formule (a) donne

$$\partial n = -10,2.$$

Prenant $\partial n = -10$, les éléments de la première demi-

rampe seront

$$n = 12, \quad g = 31^c,42, \quad h = 15^c.$$

Relativement à la seconde demi-rampe, on aura

$$\delta\varpi = -2,117,$$

et comme les autres quantités de la formule (c) conservent les mêmes valeurs, on trouve

$$\delta n = -10,4;$$

alors les éléments cherchés auront pour valeurs

$$n = 12, \quad g = 30^c,93, \quad h = 14^c,17.$$

Remarque. — Quelquefois il sera utile de savoir abaisser ou élever les limites du nombre des marches; pour cela, nommons l, l' ces limites calculées dans l'hypothèse de $g + 2h = \omega$, et recherchons la correction qu'il faut leur faire subir quand on remplace ω par $\omega + \delta\omega$. Les quantités l et l' étant de la forme $l = \frac{\theta}{\omega}$, $l' = \frac{\theta'}{\omega}$, on aura, en négligeant les quantités du second ordre par rapport à $\delta\omega$,

$$\delta l = -\frac{\theta\,\delta\omega}{\omega^2}, \quad \delta l' = -\frac{\theta'\,\delta\omega}{\omega^2};$$

remplaçant $\frac{\theta}{\omega}$, $\frac{\theta'}{\omega}$ par leurs valeurs l et l', il vient

$$(d) \qquad \delta l = -l\frac{\delta\omega}{\omega}, \quad \delta l' = -l'\frac{\delta\omega}{\omega}.$$

Si, par exemple, on prend $\omega = 64$, $\delta\omega = 4$, on trouve, pour les variations des limites particulières de n dans l'exemple déjà traité,

$$\delta l = -1,358, \quad \delta l' = -1,476;$$

de sorte que ces limites, dans l'hypothèse de $g + 2h = 60^c$, deviennent

$$n > 20,382, \quad n < 22,154.$$

6. Si l'emmarchement est donné, nous aurons

$$(13)\quad \begin{cases} u = \varepsilon - s, \\ \rho = \dfrac{2(\varpi - \mathrm{P}) - (\varepsilon - s)\sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}}{\sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} - \mu\pi - \frac{p}{\mathrm{R}} - \frac{q}{\mathrm{R}_n}}; \end{cases}$$

et pour que ces valeurs conviennent, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$\rho > s, \quad u + \rho < r.$$

Développant ces deux conditions, on trouve, en observant que $\sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} - \mu\pi - \frac{p}{\mathrm{R}} - \frac{q}{\mathrm{R}_n} > 0$ (page 10),

$$\mathrm{P} > \varpi + \frac{1}{2}(r + s - \varepsilon)\left(\mu\pi + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) - \frac{1}{2} r \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}$$

pour $u + \rho < r$;

$$\mathrm{P} < \varpi + \frac{1}{2} s \left(\mu\pi + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}$$

pour $\rho > s$; d'où l'on tire

$$(14)\quad \begin{cases} n > (3{,}125)\left[\begin{array}{l} \mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}}{,}20 \\ \quad + \frac{1}{2}(r + s - \varepsilon)\left(\mu\pi + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) - \frac{1}{2} r \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} \end{array}\right], \\ n < (3{,}125)\left[\begin{array}{l} \mathrm{H} + \varpi + 0^{\mathrm{m}}{,}12 \\ \quad + \frac{1}{2} s \left(\mu\pi + \frac{p}{\mathrm{R}} + \frac{q}{\mathrm{R}_n}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} \end{array}\right]. \end{cases}$$

7. Si la courbe de giron doit passer par le milieu de l'emmarchement, nous aurons à satisfaire aux trois conditions

$$u > \frac{1}{2} s, \quad \rho > \frac{1}{2}\varepsilon, \quad u + \rho < r,$$

lesquelles donnent respectivement, en y substituant pour u.

sa valeur,

$$u+\rho<r\ldots P>\varpi+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\frac{1}{2}r\sum\frac{A}{R},$$

$$\rho>\frac{1}{2}s\ldots P>\varpi+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\rho\sum\frac{A}{R},$$

$$u>\frac{1}{2}s\ldots P<\varpi+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{2}s\right)\sum\frac{A}{R}.$$

Nous ferons remarquer maintenant que, suivant qu'on aura $\rho>\frac{1}{2}r$ ou $\rho<\frac{1}{2}r$, on devra prendre pour limite inférieure de P, soit la première, soit la deuxième des deux limites inférieures précédentes. Passant ensuite aux limites de n, on trouve

$$(15)\quad\begin{cases} n>(3{,}125)\left[\begin{array}{l}H+\varpi+0{,}20\\ \quad+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\frac{1}{2}r\sum\frac{A}{R}\end{array}\right],\\ n<(3{,}125)\left[\begin{array}{l}H+\varpi+0{,}12\\ \quad+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{2}s\right)\sum\frac{A}{R}\end{array}\right],\end{cases}$$

si $\rho>\frac{1}{2}r$;

$$(16)\quad\begin{cases} n>(3{,}125)\left[\begin{array}{l}H+\varpi+0{,}20\\ \quad+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\rho\sum\frac{A}{R}\end{array}\right],\\ n<(3{,}125)\left[\begin{array}{l}H+\varpi+0{,}12\\ \quad+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{p}{R}+\frac{q}{R_n}+\mu\pi\right)-\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{2}s\right)\sum\frac{A}{R}\end{array}\right],\end{cases}$$

si $\rho<\frac{1}{2}r$.

Dans le cas des formules (15), les limites de ρ seront

$$\rho>\frac{1}{2}r,\quad \rho<r-\frac{1}{2}s,$$

et

$$\rho > \frac{1}{2} s, \quad \rho < \frac{1}{2} r$$

dans le cas des formules (16).

8. La courbe de giron passant toujours par le milieu de l'emmarchement, si celui-ci est donné, nous aurons

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \varepsilon, \\ \rho &= \frac{2(\varpi - P) - \frac{1}{2}\varepsilon \sum \frac{A}{R}}{\sum \frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}}; \end{aligned} \right.$$

et comme on doit avoir $\rho > \frac{1}{2}\varepsilon$, $u + \rho < r$, on en conclura

$$P > \varpi + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2} r \sum \frac{A}{R}$$

pour $u + \rho < r$;

$$P < \varpi + \frac{1}{4}\varepsilon\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon \sum \frac{A}{R}]$$

pour $\rho > \frac{1}{2}\varepsilon$; d'où l'on tire, pour les limites de n,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} n &> (3,125)\left[\begin{aligned} &H + \varpi + 0,20 \\ &+ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2} r \sum \frac{A}{R} \end{aligned}\right] \\ n &< (3,125)\left[\begin{aligned} &H + \varpi + 0,12 \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon\left(\mu\pi + \frac{p}{R} + \frac{q}{R_n}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon \sum \frac{A}{R} \end{aligned}\right]. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Les formules précédentes s'appliqueraient sans difficulté au cas où la cage présenterait une ligne polygonale régulière.

§ III.

Escaliers dans les cages polygonales ayant des angles saillants ou rentrants.

9. Soient ABCDEFG (*fig.* 4) la cage proposée, Ax, gy les lignes de départ et d'arrivée de l'escalier. Je construis un polygone équidistant, dont j'arrondis les angles en prenant pour rayon $\rho > s$; du sommet D de l'angle saillant, je mène les perpendiculaires Dd, Dd, que je prolonge respectivement jusqu'aux bissectrices voisines, puis j'arrondis l'angle d'inflexion de la ligne de foulée, en prenant D pour centre, et pour rayon $Dd = u$. En adoptant les mêmes notations que précédemment, nous aurons

$$ap = p - \frac{p}{R} u,$$

$$pb = a - \frac{a}{R} (\rho + u),$$

$$bc = A' - \frac{A'}{R'} (\rho + u),$$

$$cd = A'' - \frac{A''}{R''} (\rho + u),$$

$$\text{arc } dd = (\pi - 2\psi) u,$$

$$de = A''' - \frac{A'''}{R'''} (\rho - u),$$

$$ef = A^{\text{IV}} - \frac{A^{\text{IV}}}{R^{\text{IV}}} (\rho - u),$$

$$fq = a_n - \frac{a_n}{R_n} (\rho - u),$$

$$gq = q + \frac{q}{R_n} u,$$

$$(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) \rho = \mu \pi \rho.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et faisant $2\psi = \nu\pi$,

on trouve

$$2P = 2\varpi - u\left[\sum\frac{A}{R} - \sum_{,}\frac{A}{R} - \pi(1-\nu)\right]$$
$$- \rho\left(\sum\frac{A}{R} + \sum_{,}\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right).$$

Le signe $\sum$ s'étend à tous les côtés de la branche concave, vers la ligne de foulée; le signe $\sum_{,}$ à tous les côtés de la branche convexe; de là on tire

$$(19)\quad u = \frac{2(\varpi - P) - \rho\left(\sum\frac{A}{R} + \sum_{,}\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right)}{\sum\frac{A}{R} - \sum_{,}\frac{A}{R} - \pi(1-\nu)}.$$

Si, pour arrondir les autres angles de la ligne de foulée, on adoptait aussi u pour rayon, la valeur de u deviendrait

$$(20)\quad u = \frac{2(\varpi - P)}{2\sum\frac{A}{R} - \pi(1+\mu-\nu) - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}}.$$

Pour que la formule (19) donne des valeurs qui conviennent au problème, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$u > 0, \quad u + \rho < r, \quad u + r_1 > \rho;$$

r_1 désigne la quantité analogue à r, relative à la branche convexe DEFG, et ces conditions se réduiront à deux, savoir:

$$u > 0, \quad u + \rho < r,$$

si l'on peut prendre $\rho < r_1$. En distinguant les deux cas où l'on aurait

$$\sum\frac{A}{R} - \sum_{,}\frac{A}{R} - \pi(1-\nu) > \text{ ou } < 0,$$

on obtiendrait sans difficulté les limites de P, et par suite celles de n.

Si la ligne polygonale subissait de nouvelles inflexions, chaque angle d'inflexion introduirait au dénominateur de

la formule (19) un terme tel que $-\pi(1-\nu)$, et chaque nouvelle branche ferait entrer dans le coefficient de ρ, au numérateur, un terme tel que $\sum \frac{A}{R}$, et au dénominateur, $\pm \sum \frac{A}{R}$, suivant que la nouvelle branche de ligne polygonale tournerait sa concavité ou sa convexité vers la ligne de foulée.

10. Supposons maintenant que le polygone ayant un angle de rebroussement, soit formé de deux branches qui tournent leur concavité vers la ligne de foulée; en adoptant les mêmes notations que précédemment, nous aurons (*fig.* 5)

$$ap = p - \frac{p}{R} u,$$

$$pb = a - \frac{a}{R}(\rho + u),$$

$$bc = A' - \frac{A'}{R'}(\rho + u),$$

$$cd = A'' - \frac{A''}{R''}(\rho + u),$$

$$\text{arc } dd = \pi(1-\nu)\, u \quad \text{ou} \quad 2\, ds = 2u \cot\psi \ (^*),$$

$$de = A''' - \frac{A'''}{R'''}(\rho + u),$$

$$ef = A^{\text{IV}} - \frac{A^{\text{IV}}}{R^{\text{IV}}}(\rho + u),$$

. . . .

$$fq = a_n - \frac{a_n}{R_n}(\rho + u),$$

$$gq = q - \frac{q}{R_n} u,$$

$$(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots)\, \rho = \mu\pi\rho.$$

(*) Si l'on n'arrondit pas l'angle s.

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$2P - 2\varpi - u\left[\sum\frac{A}{R} - \pi(1-\nu) \quad \text{ou} \quad - 2\cot\psi\right]$$
$$- \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right);$$

d'où l'on tire, *si l'on arrondit l'angle de rebroussement de la ligne de giron*,

$$(21) \qquad u = \frac{2(\varpi - P) - \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right)}{\sum\frac{A}{R} - \pi(1-\nu)},$$

et *si l'on n'arrondit pas cet angle*,

$$(22) \qquad u = \frac{2(\varpi - P) - \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right)}{\sum\frac{A}{R} - 2\cot\psi}.$$

Le signe $\sum$ s'étend à tous les côtés de la cage. On aura ensuite à satisfaire aux deux conditions

$$u > 0, \quad u + \rho < r,$$

lesquelles, étant développées, donneront sans peine les limites de P, et par suite celles de n.

Si la cage avait un nouvel angle de rebroussement, on y aurait égard en introduisant au dénominateur des formules ci-dessus un terme tel que $-\pi(1-\nu)$ ou tel que $-2\cot\psi$, suivant qu'on arrondirait ou non la ligne de foulée à ses angles de rebroussement.

11. Supposons maintenant que l'angle de rebroussement ait son ouverture tournée vers la ligne de foulée; nous

aurons successivement (*fig.* 6)

$$ap = p + \frac{p}{R}u,$$

$$pb = a - \frac{a}{R}(\rho - u),$$

$$bc = A' - \frac{A'}{R'}(\rho - u),$$

$$cd = A'' - \frac{A''}{R''}(\rho - u),$$

$$-ds = -u\cot\psi, \qquad \left\{\begin{array}{l} -Vd = -(\rho_1 + u)\cot\psi, \\ \text{arc } Vz = \pi(1 - \nu)\rho_1, \\ -zd = -(\rho_1 + u)\cot\psi\ (^*), \end{array}\right.$$

$$ed = A''' - \frac{A'''}{R'''}(\rho - u)$$

$$-ds = -u\cot\psi,$$

$$ef = A^{IV} - \frac{A^{IV}}{R^{IV}}(\rho - u),$$

. . . .

$$fq = a_n - \frac{a_n}{R_n}(\rho - u),$$

$$gq = q + \frac{q}{R_n}u,$$

$$(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots)\rho = \mu\pi\rho.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$2P = 2\varpi + u\left(\sum\frac{A}{R} - 2\cot\psi\right)$$
$$-\rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right),$$

d'où l'on tire

$$(23) \qquad u = \frac{2(\varpi - P) - \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right)}{-\sum\frac{A}{R} + 2\cot\psi}.$$

(*) Ces trois termes remplacent $-2u\cot\psi$ quand on arrondit l'angle s avec le rayon ρ_1.

Si l'on suppose à la fois $p = 0$, $q = 0$, $\rho = u$, la valeur de u deviendra

$$(24) \qquad u = \frac{P - \varpi}{\frac{1}{2}\mu\pi - \cot\psi};$$

et l'on peut remarquer, en passant, que l'*on aura* $P = \varpi$, *quel que soit* u, *si*

$$\mu\pi = 2\cot\psi.$$

Si l'on arrondissait l'angle s en prenant ρ_1 pour rayon, on aurait d'abord

$$2P = 2\varpi - u\left(-\sum\frac{A}{R} + 2\cot\psi\right)$$
$$- \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right) - \rho_1[2\cot\psi - \pi(1-\nu)],$$

d'où l'on tire

$$(25) \quad u = \frac{2(\varpi - P) - \rho\left(\sum\frac{A}{R} - \mu\pi - \frac{p}{R} - \frac{q}{R_n}\right) - \rho_1[2\cot\psi - \pi(1-\nu)]}{-\sum\frac{A}{R} + 2\cot\psi}.$$

Pour que la valeur de u fournie par la formule (23) convienne au problème, il faudra satisfaire aux conditions ci-après, savoir :

$$u > 0, \quad u + r > \rho, \quad u + mn > \rho, \quad u + m'n' > \rho,$$

dans lesquelles

$$mn = R'' - \frac{R''}{A''}u\cot\psi, \quad m'n' = R''' - \frac{R'''}{A'''}u\cot\psi.$$

De même relativement à la formule (25), on devra avoir

$$u > 0, \quad u + r > \rho, \quad u + ht > \rho, \quad u + h't' > \rho,$$

dans lesquelles

$$ht = R'' - \frac{R''}{A''}(u + \rho_1)\cot\psi, \quad h't' = R''' - \frac{R'''}{A'''}(u + \rho_1)\cot\psi.$$

Si l'on compare les équations générales d'où nous avons tiré les diverses valeurs de u, on en conclura facilement les formules suivantes pour le cas où la cage de l'escalier renferme autant d'angles d'inflexion et de rebroussement qu'on voudra : *Si l'on n'arrondit aucun angle de rebroussement,*

$$(26)\quad u=\frac{2(\varpi-P)\mp\rho\left(\sum\frac{A}{R}+\sum_{1}\frac{A}{R}-\mu\pi-\frac{p}{R}-\frac{q}{R_n}\right)}{\sum\frac{A}{R}-\sum_{1}\frac{A}{R}-\pi\sum_{i}(1-\nu)\mp2\sum_{r}\cot\psi};$$

on prendra — ou + suivant que l'angle de rebroussement tournera sa convexité ou sa concavité vers la ligne de foulée.

Et si l'on arrondit tous les angles indistinctement,

$$(27)\quad u=\frac{2(\varpi-P)-\rho\left(\sum\frac{A}{R}+\sum_{1}\frac{A}{R}-\mu\pi-\frac{p}{R}-\frac{q}{R_n}\right)-\sum^{\Lambda}\rho_1[2\cot\psi-\pi(1-\nu)]}{\sum\frac{A}{R}-\sum_{1}\frac{A}{R}-\pi\sum_{i}(1-\nu)-\pi\sum^{V}(1-\nu)+2\sum^{\Lambda}\cot\psi}.$$

Dans ces formules, les caractéristiques $\sum$, $\sum_1$ s'étendent respectivement aux divers côtés des branches polygonales qui tournent leur concavité ou leur convexité vers la ligne de foulée;

La caractéristique $\sum_i$ s'étend à tous les angles d'inflexion;

La caractéristique $\sum_r$ s'étend à tous les angles de rebroussement;

La caractéristique $\sum^{\Lambda}$ s'étend à tous les angles de rebroussement dont l'ouverture est tournée vers la ligne de foulée;

La caractéristique $\sum^{V}$ s'étend à tous les angles de rebroussement convexes vers la ligne de foulée.

Remarque. — Si la cage renferme des parties curvilignes, les branches de courbe concaves et convexes vers la ligne de foulée augmenteront respectivement $\sum \frac{A}{R}$ et $\sum_1 \frac{A}{R}$ des quantités $\int \frac{dA}{R}$, $\int_1 \frac{dA}{R}$, mais au dénominateur seulement, attendu que pour les parties courbes, $\rho = 0$. Dans ces intégrales, dA et R sont l'élément et le rayon de courbure en chaque point des parties curvilignes de la cage. Aux points d'inflexion des courbes, on aura $\nu = 1$.

Si la cage était curviligne à partir de l'une ou l'autre des lignes de départ ou d'arrivée de l'escalier, il faudrait supposer $p = 0$ ou $q = 0$, ou poser simultanément $p = 0$, $q = 0$ dans le cas où la cage serait courbe des deux côtés, ce qui revient à supposer les lignes de départ et d'arrivée normales à la cage.

Toutefois nous ferons remarquer (*voir* nº 12) que les angles de rebroussement concaves vers la ligne de foulée n'introduisent que par approximation les termes facteurs de $\cot \psi$ relatifs aux parties courbes.

Ainsi les formules (26) et (27) résolvent d'une manière complète le problème général des escaliers dans les cages cylindriques.

Dans la pratique, on formera dans chaque cas particulier la valeur de u, d'où l'on déduira les limites particulières du nombre des marches.

§ IV.

Escaliers dans les cages curvilignes.

12. Si le polygone qui sert de base à la cage se change en courbe, chaque angle d'inflexion sera égal à 180 degrés; on aura donc à la fois $\rho = 0$ et $\nu = 1$ pour les points d'inflexion. A se changera aussi en dA; de plus, si l'on suppose

que les arêtes saillantes de la première et de la dernière marche (lignes de départ et d'arrivée) sont perpendiculaires à la cage, R, R', R'',..., R_n deviendront les rayons de courbure des différents points de la courbe, et les formules (26) et (27) donneront :

Si l'on n'arrondit aucun angle de rebroussement,

$$(28) \qquad u = \frac{2(\varpi - P)}{\int \frac{dA}{R} - \int_1 \frac{dA}{R} \mp 2 \sum_r \cot\psi};$$

on devra prendre — ou + suivant que l'angle de rebroussement tournera sa convexité ou sa concavité vers la ligne de foulée.

Si l'on arrondit tous les angles de rebroussement, la formule (27) relative à ce cas deviendra

$$(29) \qquad u = \frac{2(\varpi - P) - \sum^s \rho_1 [2\cot\psi - \pi(1 - \nu)]}{\int \frac{dA}{R} - \int_1 \frac{dA}{R} - \pi \sum^v (1 - \nu) + 2 \sum^s \cot\psi}.$$

Nous ferons remarquer ici que les termes facteurs de $\cot\psi$, et qui proviennent des angles de rebroussement concaves vers la ligne de foulée, n'entrent dans ces formules que par approximation. En effet, quand le polygone se change en courbe, les droites *sd*, ou V*d* de la *fig*. 6, qui introduisent $\cot\psi$, deviennent les arcs de courbe *sd*, V'*sd* (*fig*. 7). Il est évident, aussi, qu'on diminuerait l'erreur en n'arrondissant pas les angles de rebroussement concaves vers la ligne de foulée, car alors on aurait $\rho_1 = 0$. Quant au raccordement, comme il ne pourra généralement s'opérer par des arcs de cercles, on mènera sur les deux côtés de l'angle de rebroussement, d'un point O pris sur la bissectrice, des perpendiculaires O*z*, OV égales à ρ_1, si toutefois les tangentes *sx*, *sy* (*fig*. 7) s'éloignent peu de la courbe,

on prolongera ces normales jusqu'en z' et V', puis on raccordera les deux courbes en ces deux points, en employant, par exemple, un arc de parabole tracé comme dans la *fig.* 8. Si les deux tangentes, ou seulement l'une d'elles, s'écartent rapidement de la courbe, d'un point pris sur la bissectrice de l'angle de rebroussement on mènera des normales très-peu différentes de ρ_1, soit sur les deux branches de la courbe, soit sur l'une des branches et l'autre tangente, si cela est praticable, puis on opérera le raccordement comme nous venons de le dire.

Il est bon de remarquer que les parties droites de la cage n'introduisent aucun terme dans les intégrales $\int \frac{dA}{R}$, $\int_1 \frac{dA}{R}$, qui entrent dans u.

13. Les intégrales ci-dessus peuvent s'obtenir, dans chaque cas, sans qu'il soit nécessaire de connaître la nature de la base curviligne de la cage. En effet, considérons une branche de courbe qui ne présente aucun point singulier dans tout son parcours : nommant θ l'*angle relatif à cette branche de courbe* (c'est-à-dire l'angle formé par les normales extrêmes), dA, dA', dA'', etc., ses éléments infiniment petits, R, R', R'', etc., les rayons de courbure, et $d\theta$, $d\theta'$, $d\theta''$, etc., les angles consécutifs correspondants compris entre ces rayons, nous aurons évidemment

$$\frac{dA}{R} = d\theta, \quad \frac{dA'}{R'} = d\theta', \quad \frac{dA''}{R''} = d\theta'', \ldots$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$(30) \qquad \int \frac{dA}{R} = \theta;$$

d'où l'on conclut que l'*intégrale* $\int \frac{dA}{R}$ *a pour valeur l'arc de cercle décrit, avec l'unité pour rayon, entre les deux*

normales extrêmes, du sommet de cet angle pris pour centre.

Il suit de cet énoncé que $\int \frac{dA}{R}$ *conserve la même valeur pour toutes les courbes convexes terminées à deux normales communes.* L'intégration directe de $\int \frac{dA}{R}$ conduirait au même résultat.

14. Si la cage de l'escalier n'a pas de point singulier, la valeur de u deviendra

$$(31) \qquad u = \frac{2(\varpi - P)}{\int \frac{dA}{R}};$$

et pour que cette valeur convienne, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$u > 0, \quad u + s < r,$$

r étant le rayon de courbure minimum. Ces deux conditions étant développées, donnent

$$s + u < r \ldots P > \varpi - \frac{1}{2}(r - s)\int \frac{dA}{R},$$
$$u > 0 \ldots P < \varpi,$$

d'où l'on tire

$$(32) \qquad \begin{cases} n > (3,125)\left[H + \varpi + 0,20 - \frac{1}{2}(r - s)\int \frac{dA}{R}\right], \\ n < (3,125)(H + \varpi + 0,12). \end{cases}$$

Si, par exemple, la cage est une ellipse ayant pour demi-axes a, b; en posant $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$, on trouve d'abord pour l'expression générale du rayon de courbure,

$$R = \frac{a^2}{b}\sqrt{(1 - e^2\cos^2\varphi)^3},$$

e étant l'excentricité de l'ellipse, d'où l'on conclut

$$r = \frac{b^2}{a}.$$

D'un autre côté, si l'on emploie une courbe entière pour élever l'escalier à la hauteur H, on aura

$$\int \frac{dA}{R} = 2\pi,$$

et les formules précédentes deviendront

$$(33) \quad \begin{cases} u = \dfrac{\varpi - P}{\pi}, \\ n > (3,125)\left[H + \varpi + 0,20 - \pi\left(\dfrac{b^2}{a} - s\right)\right], \\ n < (3,125)(H + \varpi + 0,12). \end{cases}$$

Si l'escalier devait être à double rampe comme sont les escaliers de magasin, la courbe de giron devrait passer par le milieu de l'emmarchement, et l'on aurait pour les limites de P, en observant qu'ici $u > \frac{1}{2}s$, $2u < r$,

$$P > \varpi - \frac{1}{4} r \int \frac{dA}{R} \quad \text{pour} \quad 2u < r,$$

$$P < \varpi - \frac{1}{4} s \int \frac{dA}{R} \quad \text{pour} \quad u > \frac{1}{2}s;$$

d'où l'on tire

$$(34) \quad \begin{cases} n > (3,125)\left(H + \varpi + 0,20 - \dfrac{1}{4} r \displaystyle\int \dfrac{dA}{R}\right), \\ n < (3,125)\left(H + \varpi + 0,12 - \dfrac{1}{4} s \displaystyle\int \dfrac{dA}{R}\right). \end{cases}$$

Si la courbe a des points d'inflexion sans points de rebroussement, on aura

$$(35) \quad u = \frac{2(\varpi - P)}{\displaystyle\int \frac{dA}{R} - \int_1 \frac{dA}{R}};$$

et pour que cette valeur convienne au problème, on devra avoir, en nommant r le rayon de courbure minimum parmi toutes les branches de la cage concaves vers la ligne de foulée,

$$u > 0, \quad u + s < r.$$

Développant ces deux conditions, on est conduit aux résultats suivants :

$$u + s < r \quad \text{donne} \quad P > \varpi - \frac{1}{2}(r - s)\left(\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R}\right),$$

$$u > 0 \quad \text{donne} \quad P < \varpi,$$

si $\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R} > 0$;

$$u > 0 \quad \text{donne} \quad P > \varpi,$$

$$u + s < r \quad \text{donne} \quad P < \varpi - \frac{1}{2}(r - s)\left(\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R}\right),$$

si $\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R} < 0$; d'où l'on tire

$$(36) \quad \begin{cases} n > (3{,}125)\left[\begin{array}{c} H + \varpi + 0{,}20 \\ -\frac{1}{2}(r - s)\left(\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R}\right) \end{array}\right], \\ n < (3{,}125)(H + \varpi + 0{,}12), \end{cases}$$

si $\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R} > 0$; et

$$(37) \quad \begin{cases} n > (3{,}125)(H + \varpi + 0{,}20); \\ n < (3{,}125)\left[\begin{array}{c} H + \varpi + 0{,}12 \\ -\frac{1}{2}(r - s)\left(\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R}\right) \end{array}\right], \end{cases}$$

si l'on a $\int \frac{dA}{R} - \int_{1} \frac{dA}{R} < 0$.

Si la courbe de giron était assujettie à passer par le milieu de l'emmarchement comme dans le cas d'un escalier à

double rampe, on aurait

$$(38)\quad \begin{cases} n > (3,125)\left[H + \varpi + 0,20 - \frac{1}{4} r \left(\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R}\right)\right], \\ n < (3,125)\left[H + \varpi + 0,12 - \frac{1}{4} s \left(\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R}\right)\right], \end{cases}$$

si $\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R} > 0$;

$$(39)\quad \begin{cases} n > (3,125)\left[H + \varpi + 0,20 - \frac{1}{4} s \left(\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R}\right)\right], \\ n < (3,125)\left[H + \varpi + 0,12 - \frac{1}{4} r \left(\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R}\right)\right], \end{cases}$$

si $\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R} < 0$.

Nous ferons remarquer que dans les escaliers à double rampe on pourra se donner à volonté, pour cage de l'escalier, l'une ou l'autre des projections horizontales des deux limons.

Première remarque. — La formule (35) donne lieu à un théorème remarquable. Supposant $P = \varpi$, nous devrons avoir

$$\int \frac{dA}{R} = \int_{,} \frac{dA}{R}.$$

Par conséquent, *une courbe renfermant autant de points d'inflexion qu'on voudra, sera de même longueur que son équidistante, lorsque étant limitées à deux normales communes, la somme des angles relatifs aux branches concaves de cette courbe, sera égale à la somme de ceux relatifs aux branches convexes.*

Seconde remarque. — Dans le cas de $P = \varpi$, on prendra pour n le nombre entier qui s'approche le plus des limites égales, on divisera H par n, 2 P par $n - 1$; et si l'on trouve pour h et g des valeurs comprises entre les limites assignées, on les adoptera, car la relation $g + 2h = 64^{c}$ sera à très-peu près satisfaite.

Pour donner un exemple d'escalier construit dans une cage renfermant un angle de rebroussement, supposons celle-ci formée de deux arcs de cercles décrits des points C et D (*fig.* 9) avec le même rayon R; l'escalier devant s'élever dans l'intérieur de la cage, l'angle de rebroussement tournera sa convexité vers la ligne de foulée, et en convenant de ne pas l'arrondir, la formule (28) donnera

$$u = \frac{2(\varpi - P)}{\int \frac{dA}{R} - 2\cot\psi},$$

laquelle devra satisfaire aux deux conditions

$$u > 0, \quad u + s < R.$$

Comme, dans ce cas,

$$\psi = 60^\circ, \quad \cot\psi = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \int \frac{dA}{R} = \frac{4}{3}\pi,$$

on aura

$$\int \frac{dA}{R} - 2\cot\psi > 0,$$

et les limites de n seront

$$n > (3,125)\left[H + \varpi + 0,20 - \frac{1}{2}(R - s)\left(\int \frac{dA}{R} - 2\cot\psi\right)\right],$$

$$n < (3,125)(H + \varpi + 0,12).$$

Supposons, par exemple, $H = 2^m,50$, $R = 1^m$; on trouve d'abord:

limites générales $\begin{cases} n > 12,5, \\ \quad < 20,83; \end{cases}$

limites particulières $\begin{cases} n > 12,612, \\ \quad < 14,732; \end{cases}$

et l'on voit que les limites particulières comprennent deux nombres entiers qui sont en même temps renfermés entre les limites générales.

Si l'on remarque maintenant qu'en ajoutant 0,25 à la

limite supérieure, on n'introduit pas de nombre entier, il faut en conclure que le problème admet deux solutions et n'en admet pas davantage (*voir* page 12). Passant au calcul des éléments en prenant 13 pour le nombre des marches, on trouve sans peine

$$n = 13, \quad h = 19^c,23, \quad g = 25^c,54,$$

$$P = 1^m,5323, \quad u = 0^m,3705, \quad \varepsilon = 0^m,8705.$$

Cet escalier, avec ses marches balancées, est d'un effet très-agréable à l'œil.

Supposons, pour dernier exemple, une cage d'escalier formée de la manière suivante :

Elle commence par deux arcs de cercles tels que ceux de la *fig.* 9, et dont le rayon est R;

A la suite vient, en s'y raccordant intérieurement, un quart d'ellipse ayant pour demi-axes $a = \frac{5}{4}R$, $b = R$;

Ce quart d'ellipse est continué par un quart de cercle ayant pour rayon R';

De l'extrémité de ce quart de cercle part une ligne droite f dirigée dans le prolongement du rayon.

La cage ayant deux angles de rebroussement, l'un convexe, l'autre concave vers la ligne de foulée, si l'on n'arrondit aucun d'eux et qu'on nomme 2ψ le premier, $2\psi'$ le second, on aura par la formule (28)

$$u = \frac{2(\varpi - P)}{\int \frac{dA}{R} - \int_1 \frac{dA}{R} - 2\cot\psi + 2\cot\psi'}.$$

Mais, dans ce cas,

$$\cot\psi = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \cot\psi' = 1, \quad \int \frac{dA}{R} - \int_1 \frac{dA}{R} = \frac{4}{3}\pi,$$

d'où

$$\int \frac{dA}{R} - \int_{,} \frac{dA}{R} - 2\cot\psi + 2\cot\psi' = 2\left(1 + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right);$$

alors la valeur de u devient

$$u = \frac{\varpi - P}{1 + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\sqrt{3}}.$$

Comme le rayon de courbure minimum de la partie concave de la cage a pour valeur $r = \frac{4}{5}R$, on devra satisfaire aux deux conditions

$$u > 0, \quad u + s < \frac{4}{5}R,$$

d'où l'on tire

$$n > (3{,}125)\left[H + \varpi + 0{,}20 - \left(\frac{4}{5}R - s\right)\left(1 + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right],$$
$$n < (3{,}125)(H + \varpi + 0{,}12).$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$H = 3^m{,}50, \quad R = 1^m, \quad R' = 0^m{,}321, \quad f = 0^m{,}612,$$

on trouve :

$$\text{limites générales} \begin{cases} n > 17{,}5, \\ \quad < 29{,}17; \end{cases}$$
$$\text{limites particulières} \begin{cases} n > 20{,}07, \\ \quad < 22{,}339. \end{cases}$$

Si l'on ajoute (0,25) à la limite supérieure, et si l'on retranche 0,25 de la limite inférieure de n, ces deux limites comprennent une nouvelle valeur entière de n, savoir $n = 20$; pour savoir si cette valeur est bonne, on corrigera la limite inférieure par la formule

$$\delta l = -\left(\frac{K}{l} - f\right) \text{ (page 16)};$$

et comme ici $K = (3,125)H = 10,9375$, $l = 20,07$, on en conclut

$$\delta l = -0,1699;$$

par suite, cette limite inférieure devient 19,9. On pourra donc prendre pour limites particulières de n,

$$n > 19,9,$$
$$n < 22,339,$$

et le problème admettra trois solutions :

$$n = 20, \quad n = 21, \quad n = 22 \ (*).$$

Ayant choisi pour nombre des marches l'un de ces nombres, les autres éléments de l'escalier s'obtiendront sans difficulté, et il ne restera plus qu'à distribuer les marches sur le limon par les méthodes de *balancement*.

Si l'on convient d'arrondir les angles de rebroussement, on aura par la formule (29),

$$u = \frac{\varpi - P - \rho_1\left(1 - \frac{1}{4}\pi\right)}{1 + \frac{1}{2}\pi},$$

d'où l'on conclura sans peine les limites de n, et, par suite, les autres éléments de l'escalier.

15. Supposons maintenant que les arêtes des marches

(*) Si l'on veut abaisser encore la limite inférieure du nombre des marches, on se servira de la formule

$$\delta l = -l\frac{\delta\omega}{\omega} \quad \text{(page 22)},$$

laquelle donne

$$\delta l = -1,2\ldots$$

en y faisant

$$l = 19,9, \quad \omega = 64, \quad \delta\omega = 4;$$

de sorte que dans l'hypothèse de $g + 2h = 60^c$, on pourra prendre 19 pour nombre des marches de l'escalier.

extrêmes MB, ND (*fig.* 10) ne soient pas normales à la cage. Dans ce cas, on calculera les éléments de l'escalier comme si ces arêtes étaient les normales MA, NC; ensuite on corrigera la ligne de foulée de la manière suivante :

Regardant les arcs AB, ab et CD, cd comme des lignes droites, nous aurons, en posant $AB = a$, $CD = a'$,

$$ab : AB :: u + \delta u : u, \quad cd : CD :: u + \delta u : u,$$

δu étant la correction de u comptée de la ligne de foulée, et qui sera regardée comme négative de A vers M et comme positive en sens inverse, c'est-à-dire en s'éloignant de la cage. Ces deux proportions donnent

$$ab = a + a\frac{\delta u}{u}, \qquad cd = a' + a'\frac{\delta u}{u}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$ab + cd = a + a' + (a + a')\frac{\delta u}{u}.$$

Remarquons maintenant que la valeur de u, quelle que soit la figure de la cage, peut s'écrire sous la forme

$$u = \frac{2(\varpi - P) + U}{V},$$

U et V étant des quantités indépendantes de P. Prenant les différences, il vient

$$\delta u = -\frac{2\delta P}{V};$$

on aura donc, en observant que $ab + cd = 2\delta P$,

$$-V\delta u = (a + a')\left(1 + \frac{\delta u}{u}\right),$$

d'où l'on tire

(40) $$\delta u = -\frac{(a + a')u}{a + a' + Vu}.$$

Les arcs a et a' devront être regardés comme positifs ou comme négatifs, suivant qu'ils seront comptés du dehors au dedans de la courbe, à partir des normales extrêmes, ou bien du dedans au dehors.

Première remarque. — Le calcul des éléments des escaliers dans les cages polygonales se ramène facilement à celui des cages curvilignes. Il suffit pour cela d'arrondir les angles de la première, soit par des arcs de courbes, soit en y inscrivant une même courbe qui s'en écarte peu. On déterminera ensuite les éléments de l'escalier en substituant cette cage fictive à la cage vraie.

Deuxième remarque. — Si au lieu de prendre pour ligne d'arrivée de l'escalier l'arête saillante et antérieure de la dernière marche, on pouvait prendre l'arête postérieure de la même marche, la ligne de foulée contiendrait autant de girons qu'il y a de hauteurs de marches, et l'on aurait simplement

$$P = (0{,}32)\,n - H.$$

Alors les limites de n, déduites de cette formule, seraient rigoureusement exactes; il suffirait, pour les obtenir, de supprimer 0,20 et 0,12 dans toutes les limites inférieures et supérieures déjà trouvées.

NOTE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES ÉQUIDISTANTES.

Nous avons démontré à la page 39 un théorème assez curieux sur les courbes équidistantes; à ce théorème nous joindrons les deux suivants :

THÉORÈME. — *L'aire d'une bande comprise entre une courbe et son équidistante, et limitée de chaque côté à deux normales communes, est équivalente à un rectangle qui aurait pour base la courbe rectifiée, et pour hauteur la largeur de la bande, pourvu toutefois que la somme des angles relatifs aux branches concaves de la courbe, soit égale à la somme de ceux relatifs aux branches convexes.*

Nommant Ω l'aire de la bande, on trouve sans peine

$$\Omega = 2\varpi u - \frac{1}{2}u^2\left(\int\frac{dA}{R} - \int_1\frac{dA}{R}\right);$$

par conséquent, si l'on suppose $\int\frac{dA}{R} - \int_1\frac{dA}{R} = 0$, on aura

$$\Omega = 2\varpi u.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on pose $\int\frac{dA}{R} - \int_1\frac{dA}{R} = 2\pi$, on aura

$$\Omega = 2\varpi u - \pi u^2.$$

Cette valeur de Ω est la même que celle qu'on obtiendrait pour une courbe fermée n'ayant aucun point singulier,

car on aurait à la fois

$$\int \frac{dA}{R} = 2\pi, \quad \int_1 \frac{dA}{R} = 0.$$

De là résulte le théorème suivant :

Théorème. — *L'aire d'une bande comprise entre une courbe fermée et son équidistante, a pour mesure le rectangle qui aurait pour base la courbe rectifiée, et pour hauteur la largeur de la bande, moins le cercle décrit avec un rayon égal à la largeur de cette bande.* On tirerait de la valeur générale de Ω d'autres conséquences analogues.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

§ I. *Introduction.*

Relation entre la grandeur des girons et la hauteur des marches....... 5
Limites des hauteurs de marches et des girons; calcul de ces deux éléments quand le nombre des marches est connu.................... 6
Limites *générales* du nombre des marches.......................... 7

§ II. *Escaliers dans les cages qui ont pour bases des polygones convexes.*

Distance à la cage de la ligne de giron. Formule (4).................. 9
Limites *restreintes* du nombre des marches. Leur détermination. Formules (7).. 12
Limites exactes du nombre des marches. Formules (8)............... 15
Formules qui servent, dans tous les cas, à corriger les limites restreintes du nombre des marches. Formules (9)... 16
Limites du nombre des marches lorsque la ligne de départ et d'arrivée de l'escalier ont la même projection horizontale. Formules (10)..... 17
Escalier dans une cage rectangulaire. Formules (11).................. 18
Calcul des éléments des diverses rampes d'un même escalier; cas où l'escalier doit desservir une porte placée sur son parcours. Formules (12), (a), (b), (c) 22
Manière d'abaisser ou d'élever les limites du nombre des marches, en faisant varier de chaque côté de $6\frac{1}{4}$c la somme $g + 2h$............. *Ib.*
Formules qui résolvent le problème des escaliers lorsque l'emmarchement est donné. Formules (13), (14)................................ 23
Cas où la courbe de giron passe par le milieu de l'emmarchement, celui-ci n'étant pas donné. Formules (15), (16)..................... 24
Cas où la courbe de giron passant par le milieu de l'emmarchement, celui-ci est donné. Formules (17), (18).......................... 25

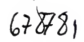
§ III. *Escaliers dans les cages polygonales ayant des angles saillants ou rentrants.*

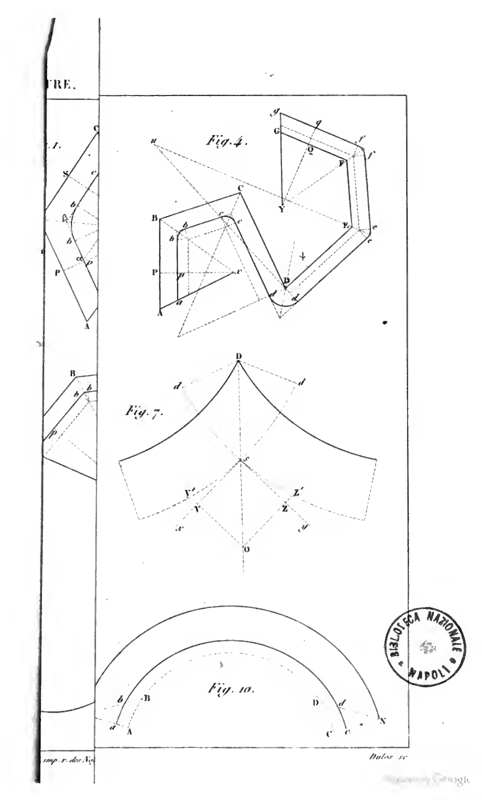
Calcul des formules qui résolvent le problème général des escaliers. Formules (26), (27).................................. 33

§ IV. *Escaliers dans les cages curvilignes.*

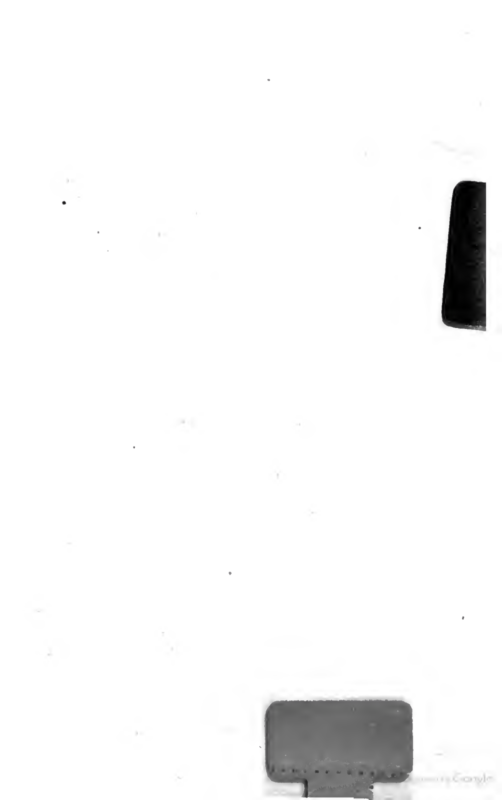
Formules qui résolvent le problème des escaliers dans les cages curvilignes. Formules (28), (29)................................. 35
Calcul de l'intégrale $\int \frac{dA}{R}$.. 36
Distance de la ligne de giron à la cage, quand celle-ci ne présente aucun point singulier. Formule (31)... .... *Ib.*
Limites du nombre des marches. Formules (32)........................ *Ib.*
Exemple d'escalier dans une cage elliptique, alors qu'on emploie une courbe entière pour élever l'escalier à la hauteur du palier. Form. (33). 37
Escaliers à double rampe. Formules (34)................................ *Ib.*
Distance de la ligne de giron à la cage, quand celle-ci a des points d'inflexion sans points de rebroussement. Formule (35). .... *Ib.*
Limites du nombre des marches. Formules (36), (37)............... 38
Cas où la courbe de giron passe par le milieu de l'emmarchement. Formules (38), (39).. 39
Égalité de longueur de deux courbes équidistantes; nombre des marches dans ce cas particulier.. *Ib.*
Exemples d'escaliers dans des cages qui présentent des angles de rebroussement..... 43
Correction de la ligne de giron, lorsque les arêtes des marches extrêmes ne sont pas normales à la cage. Formule (40)...................... 45
Note sur quelques propriétés des courbes équidistantes............... 47


FIN DE LA TABLE.




TRE.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 10.
Dulos sc






BIBLIOTECA
M